مدارهای جریان متناوب

۱- نیروی محرکه ی متناوب

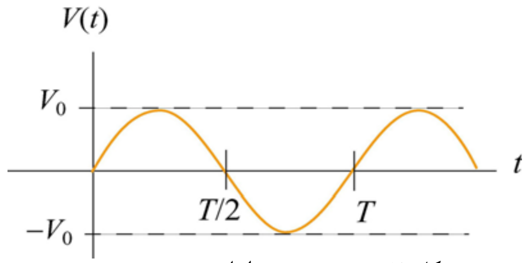
بنابه قانون القاء فاراده، شار مغناطیسی متغیر می تواند نیروی محرکه تولید کند. به ویژه، اگر پیچه ای در میدان مغناطیسی بچرخد (مولد) نیروی محرکه ی آن به طور سینوسی با زمان تغییر می کند و جریان متناوب به وجود می آورد. پس، می توان مولد را چشمه ی نیروی محرکه ی متناوب پنداشت. چشمه ی نیروی محرکه ی متناوب را در یک مدار الکتریکی با نماد شکل (۱) نشان می دهند. برای مثال ، ولتاژ متناوب را می توان با رابطه ی زیر نشان داد.

شکل ۱- نماد چشمه ی ولتاژ متناوب

$$V(t) = V_0 \sin \omega t \qquad (۱)$$

بیشینه ی ولتاژ، V_0 ، **دامنه** نامیده می شود.

با تغییر سینوس بین ۱+ و ۱-، ولتاژ بین $+V_0$ و $-V_0$ تغییر می کند. نمودار ولتاژ $V(t)$ برحسب زمان در شکل (۲) نشان داده شده است. تابع سینوس نسبت به زمان دوره ای است ؛ یعنی اندازه ی ولتاژ در زمان t با مقدار آن در زمان بعدی $t' = t + T$ برابر است.



شکل ۲- چشمه ی ولتاژ سینوسی

زمان T *دوره ی* آن است. بسامد f ولتاژ با

$$f = 1/T \qquad (۲)$$

تعریف می شود. یکای بسامد هرتز (Hz) یا s^{-1} است. بسامد زاویه ای با $\omega \equiv 2\pi f$ به بسامد و در نتیجه به دوره مربوط است.

وقتی چشمه ی ولتاژ متناوب به مدار RLC وصل می شود به مدار انرژی می دهد تا انرژی تلف شده در مقاومت را جبران کند. با این کار از میرایی نوسان بار ، جریان و اختلاف پتانسیل جلوگیری می کند و نوسان بار و جریان و اختلاف پتانسیل نوسان های واداشته می شوند. پس از سپری شدن" زمان گذرا " ، شارش جریان در مدار در اثر این ولتاژ وادارنده روی می دهد و واکنش مدار به این ولتاژ است. جریانی را که در مدار شارش می کند می توان به صورت زیر نوشت

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t - \phi) \qquad (۳)$$

این جریان با همان بسامد ولتاژ نوسان می کند. دامنه ی جریان I_0 و فاز آن ϕ است که به بسامد وادارنده بستگی دارد.

۲- مدارهای متناوب ساده

پیش از بررسی مدار واداشته ی RLC ، مدارهای ساده را در نظر می گیریم که تنها یک عنصر (یک مقاومت ، یک خودالقا ، یک خازن) به چشمه ی ولتاژ متناوب سینوسی وصل است.

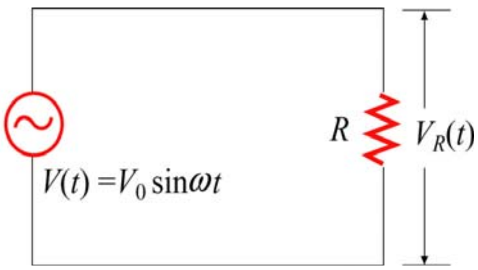
۲-۱- مدار مقاومت

مداری را برابر شکل (۳) در نظر بگیرید که فقط یک مقاومت به چشمه ی ولتاژ سینوسی وصل است (این مدار متناظر با مدار RLC است که در آن ظرفیت $C = \infty$ و خودالقا $L = 0$ است. این را خواهیم دید.) اگر قانون کرشهوف را برای این مدار به کار ببریم ، می بینیم که داریم

$$V(t) - V_R(t) = V(t) - I_R(t)R = 0 \qquad (٤)$$

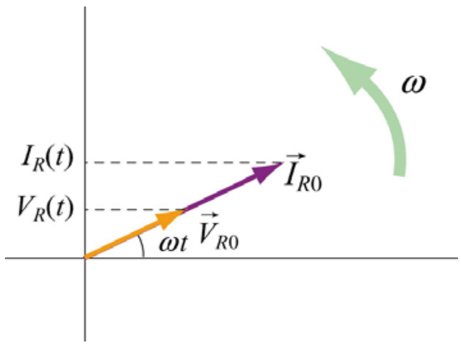
که در آن $V_R(t) = I_R(t)R$ اختلاف پتانسیل لحظه ای دو سر مقاومت است. جریان لحظه ای در مدار با رابطه ی زیر داده می شود

$$I_R(t) = \frac{V_R(t)}{R} = \frac{V_{R0}(t)\sin\omega t}{R} = I_{R0}\sin\omega t \qquad (٥)$$

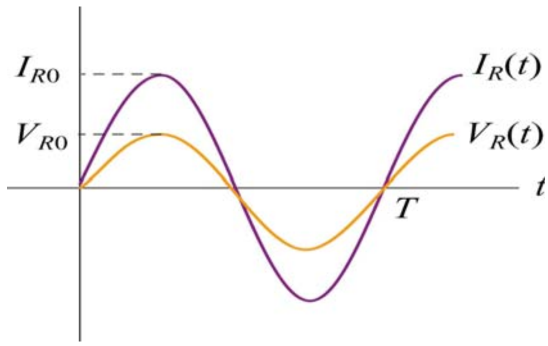


شکل ۳- مقاومت در مدار با ولتاژ متناوب

که در آن $V_{R0}=V_0$ و $I_{R0}=V_{R0}/R$ جریان بیشینه است. از مقایسه ی رابطه های (٥) و (۳) می بینیم که $\phi=0$ است. یعنی $I_R(t)$ و $V_R(t)$ هم فاز اند. هم فاز بودن به این معنی است که بیشینه یا کمینه ی دوهر دو در یک زمان روی می دهد. در شکل (٤) وابستگی زمانی جریان گذرنده از مقاومت و ولتاژ دو سر آن نشان داده شده اند. رفتار $I_R(t)$ و $V_R(t)$ را با نمودار فازنما هم می توان همانند شکل (٥) نمایش داد. فازنما ردار چرخانی است که از ویژگی های زیر برخوردار است:



شکل ٥- فازنما ی جریان گذرنده از مقاومت



شکل ٤- وابستگی زمانی $V_R(t)$ و $I_R(t)$

۱- طول: طول بردار فازنما متناظر با دامنه است.

۲- سرعت زاویه ای: بردار نماینده ی کمیت متناوب با سرعت زاویه ای ω پادساعتگرد می چرخد.

۳- تصویر: تصویر بردار در راستای محور قائم، با مقدار کمیت متناوب در زمان t متناظر است.

فازنما را با نماد برداری نشان خواهیم داد. اندازه ی فازنمای $\mathbf{V}_{R0}$ مقدار ثابت دامنه ی V_{R0} آن است. تصویر فازنمای $\mathbf{V}_{R0}$ در راستای محور عمودی، $V_{R0}\sin\omega t$، است که با اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت $V_R(t)$ در زمان t برابر است. فازنمای جریان گذرنده از مقاومت، $\mathbf{I}_{R0}$ ، هم توصیفی همانند دارد. از نمودار شکل (٥) فازنما دیده می شود که جریان و ولتاژ هم فاز اند.

میانگین زمانی جریان در یک دوره، T ، از رابطه ی زیر به دست می آید

$$\langle I_R(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T I_R(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T I_{R0}\sin\omega t\ dt = \frac{I_{R0}}{T}\int_0^T \sin\frac{2\pi t}{T}\ dt = 0 \qquad (٦)$$

این مقدار میانگین صفر است ؛ چون

$$\langle \sin \omega t \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \sin \omega t \; dt = 0 \tag{۷}$$

هنگامی که می خواهیم مقدارهای میانگین را حساب کنیم ، دانستن رابطه های زیر سودمند می شوند

$$\langle \cos \omega t \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \cos \omega t \; dt = 0 \tag{۸}$$

$$\langle \sin \omega t \; \cos \omega t \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \sin \omega t \; \cos \omega t \; dt = 0 \tag{۹}$$

$$\langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \sin^2 \omega t \; dt = \frac{1}{T}\int_0^T \sin^2\left(\frac{2\pi t}{T}\right)dt = \frac{1}{2} \tag{۱۰}$$

$$\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2 \omega t \; dt = \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2\left(\frac{2\pi t}{T}\right)dt = \frac{1}{2} \tag{۱۱}$$

از این رابطه ها دیده می شود که میانگین مربع جریان غیرصفر است:

$$\langle I_R^2(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T I_{R0}^2 \sin^2\omega t \; dt = I_{R0}^2 \frac{1}{T}\int \sin^2\left(\frac{2\pi t}{T}\right)dt = \frac{1}{2} I_{R0}^2 \tag{۱۲}$$

در واژگان جریان متناوب از جذر میانگین مربعی جریان و ولتاژ استفاده می شود که به صورت زیر تعریف می شوند.

$$I_{rms} \equiv \sqrt{\langle I_R^2(t)\rangle} = \frac{I_{R0}}{\sqrt{2}} \tag{۱۳}$$

$$V_{rms} \equiv \sqrt{\langle V_R^2(t)\rangle} = \frac{V_{R0}}{\sqrt{2}} \tag{۱٤}$$

جذر میانگین مربعی ولتاژ برق خانه ها در ایران $V_{rms} = 120$ ولت با بسامد $f = 60\,Hz$ است.

توان اتلافی در مقاومت را می توان برحسب این کمیت های میانگین مربعی به صورت زیر نوشت:

$$P_R(t) = I_R(t)V_R(t) = I_R^2(t)R$$

$$\Rightarrow \langle P_R(t)\rangle = \langle I_R^2(t)R\rangle = \frac{1}{2}I_{R0}^2 R = I_{rms}^2 R = I_{rms}V_{rms} = \frac{V_{rms}^2}{R} \tag{۱۵}$$

۲-۲- مدار خود القاء

مداری را برابر شکل (٦) در نظر بگیرید که در آن فقط یک خودالقا به مولد نیروی محرکه ی متناوب وصل است. این مدار متناظر با مدار RLC با ظرفیت خازن $C = \infty$ و مقاومت $R = 0$ است. با استفاده از قانون کرشهوف به این مدار، معادله ی ودار به صورت زیر به دست می آید

$$V(t) - V_L(t) = V(t) - L\frac{dI_L}{dt} = 0 \tag{۱٦}$$

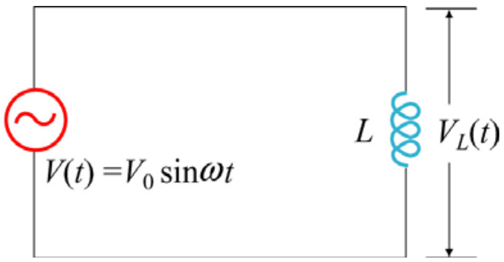
$$\Rightarrow \quad \frac{dI_L}{dt} = \frac{V(t)}{L} = \frac{V_{L0}}{L}\sin \omega t \tag{۱۷}$$

که در آن $V_{L0}=V_0$ است. با انتگرال گیری از رابطه ی (۱۷) جریان به صورت زیر به دست می آید

$$I_L(t)=\int d\,I_L=\frac{V_{L0}}{L}\int \sin\omega t\,dt$$

$$=-\left(\frac{V_{L0}}{\omega L}\right)\cos\omega t=\left(\frac{V_{L0}}{\omega L}\right)\sin\left(\omega t-\pi/2\right)$$

(۱۸)

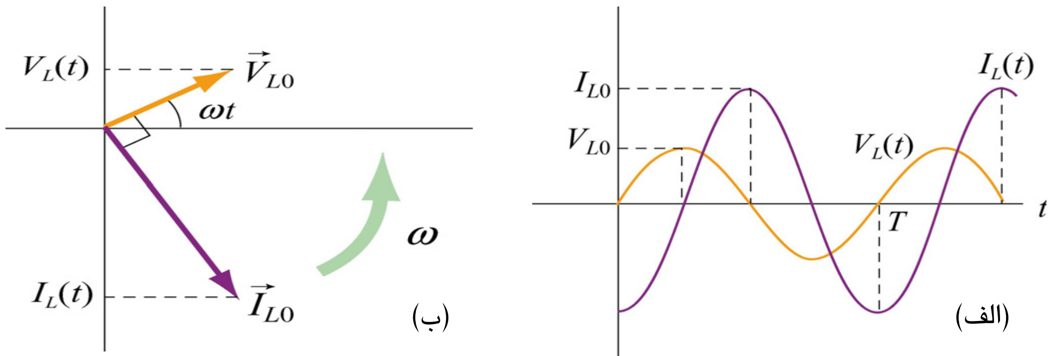


شکل ٦- مدار خود القا

مقایسه ی رابطه ی (۱۸) و رابطه ی (۳) نشان می دهد که دامنه ی جریان گذرنده از خودالقا برابر است با

$$I_{L0}=\frac{V_{L0}}{\omega L}=\frac{V_{L0}}{X_L} \qquad (۱۹)$$

که در آن $X_L\equiv\omega L$ **واکنایی القایی** مدار است. مانند مقاومت، یکای واکنایی القایی اهم (Ω) است اما ، برعکس مقاومت، واکنایی به طور خطی به بسامد زاویه ای ω بستگی دارد و بنابراین، مقاومت مدار در برابر جریان با ω افزایش می یابد؛ چون در بسامد های بالا جریان سریع تر تغییر پیدا می کند. از سوی دیگر با میل کردن ω به صفر واکنایی القایی هم صفر می شود. از مقایسه ی رابطه ی (۱۸) و رابطه ی (۳) هم چنین می بینیم که ثابت فاز عبارت است از $\phi=+\pi/2$. نمودارهای جریان و ولتاژ و نیز فازنمای آنها در شکل (۷) نشان داده شده اند

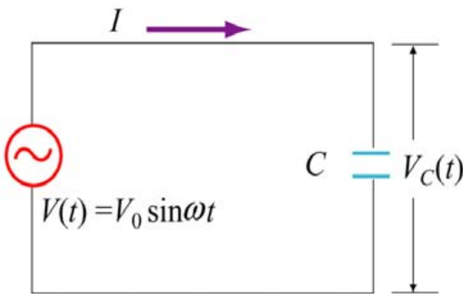


شکل ۷- (الف) نمایش جریان و ولتاژ مدار خودالقا برحسب زمان. (ب) فازنمای متناظر

همان گونه که از شکل (۷) پیداست، جریان $I_L(t)$ به اندازه ی $\phi=\pi/2$ نسبت به ولتاژ $V_L(t)$ اختلاف فاز دارد. یعنی یک چهارم چرخه پس از آنگه اختلاف پتانسیل دو سر خودالقا به بیشینه مقدار خود رسید، جریان $I_L(t)$ بیشینه می شود. بنابراین، گوییم *در مدار خودالقا جریان به اندازه ی $\pi/2$ از ولتاژ عقب تر است.*

۳-۲- مدار خازن

شکل (۸) مداری را نشان می دهد که در آن خازنی به یک چشمه ی نیروی محرکه ی متناوب وصل است. این یک مدار RLC است که در آن هر دوی $R=0$ و $L=0$ اند. اگر قانون کرشهوف را در این مدار به کار ببریم ، معادله ی زیر برای مدار به دست می آید



شکل ۸- مدار خازن

$$V(t)-V_C(t)=V(t)-\frac{Q(t)}{C}=0 \qquad (۲۰)$$

ویا

$$\begin{aligned} Q(t)&=CV(t)=CV_C(t) \\ &=CV_{C0}\sin\omega t \end{aligned} \qquad (۲۱)$$

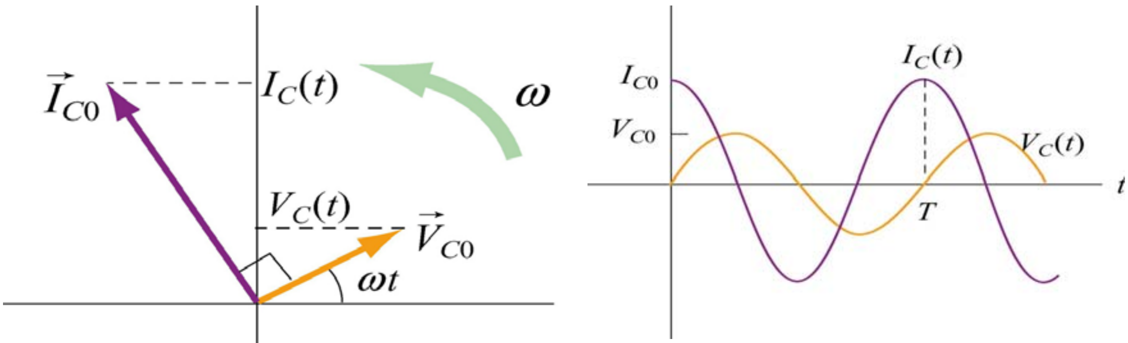
که در آن $V_{C0}=V_0$ است. از سوی دیگر جریان برابر است با

$$\begin{aligned} I_C(t)&=+\frac{dQ}{dt}=\omega CV_{C0}\cos\omega t \\ &=\omega CV_{C0}\sin\left(\omega t+\pi/2\right) \end{aligned} \qquad (۲۲)$$

رابطه ی بالا نشان می دهد که بیشینه مقدار جریان عبارت است از

$$I_{C0}=\omega CV_{C0}=\frac{V_{C0}}{X_C} \qquad (۲۳)$$

که در آن $X_C\equiv 1/\omega C$ **واکنایی خازنی** نام دارد. یکای واکنایی خازنی هم اهم است و مقاومت موثر مدار خازنی است. توجه کنید که X_C با هر دوی ω و C نسبت واورن دارد و با $\omega\to 0$ واگرا می شود. از مقایسه ی رابطه ی (۲۳) و رابطه ی (۳) دیده می شود که $\phi=-\pi/2$. نمودار جریان و ولتاژ و نیز فازنمای این مدار در شکل (۹) نشان داده شده اند



شکل ۹- نمودار ولتاژ و جریان در مدار خازنی (سمت راست) و فازنمای آن (سمت چپ

توجه کنید که در زمان $t=0$ ولتاژ دو سر خازن صفر است در حالی که جریان در مدار بیشینه مقدار خود را دارد. در واقع ، $I_C(t)$ یک چهارم چرخه ($\phi=\pi/2$) زودتر از $V_C(t)$ به بیشینه مقدار خود می رسد . بنابراین ، گوییم *در مدار خازن جریان به اندازه ی $\pi/2$ از ولتاژ جلوتر است.*

۲-۴ – مدار RCL سری

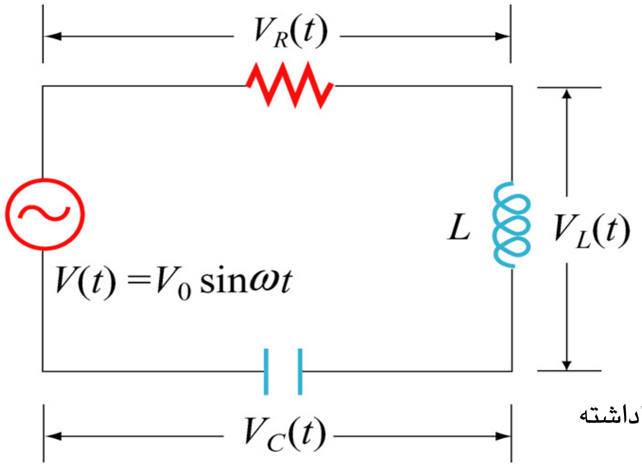
اینک مداری سری RCL را همانند شکل (۱۰) در نظر بگیرید. از قانون کرشهوف داریم

$$V(t)-V_R(t)-V_L(t)-V_C(t)=V(t)-IR-L\frac{dI}{dt}-\frac{Q}{C}=0 \qquad (۲٤)$$

این رابطه را می توان به صورت زیر نوشت

$$L\frac{dI}{dt}+IR+\frac{Q}{C}=V_0\sin\omega t \qquad (۲۵)$$

اگر فرض کنیم که خازن در آغاز بی بار بوده است، آنگاه $I=+dQ/dt$ با افزایش بار خازن متناسب



شکل ۱۰- مدار RCL سری واداشته

می شود و رابطه ی (۲۵) را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=V_0\sin\omega t \qquad (۲۶)$$

یک پاسخ ممکن معادله ی دیفرانسیل مرتبه دو بالا به صورت زیر است

$$Q(t)=Q_0\cos(\omega t-\phi) \qquad (۲۷)$$

دامنه ی Q_0 و فاز ϕ عبارتند از

$$Q_0=\frac{V_0/L}{\sqrt{\left(R\omega/L\right)^2+\left(\omega^2-1/LC\right)^2}}=\frac{V_0}{\omega\sqrt{R^2+\left(\omega L-1/\omega C\right)^2}}$$

$$=\frac{V_0}{\omega\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}} \qquad (۲۷)$$

$$\tan\phi=\frac{1}{R}\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)=\frac{X_L-X_C}{R} \qquad (۲۸)$$

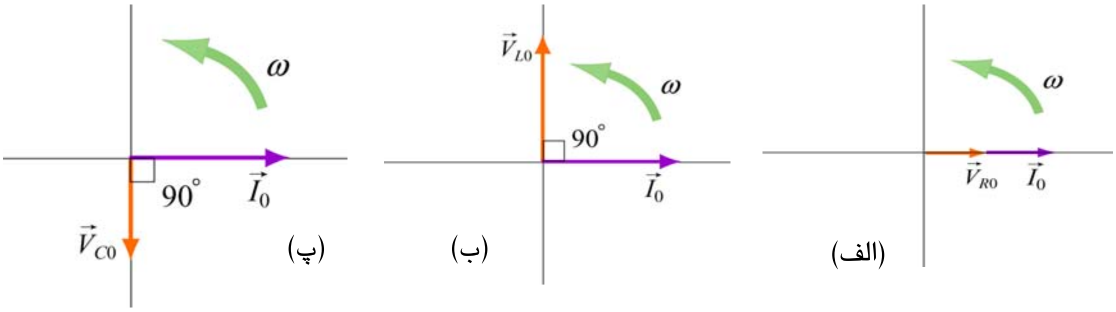
و جریان متناظر عبارت است از

$$I(t)=+\frac{dQ}{dt}=I_0\sin(\omega t-\phi) \qquad (۲۹)$$

دامنه ی این جریان عبارت است از

$$I_0=-Q_0\omega=-\frac{V_0}{\sqrt{R^2\_(X_L-X_C)^2}} \qquad (۳۰)$$

توجه کنید که دامنه و فاز جریان در مدار سری RCL در همه ی نقاط یکسان است؛ در حالی که دامنه و فاز ولتاژ لحظه ای دو سر هر یک از عنصرهای مدار، R ، L و C رابطه ی متفاوتی با جریان دارند. می توان این در نمودارهای فازنما شکل (۱۱) دید. ولتاژها ی لحظه ای را می توان از شکل (۱۱) به صورت زیر به دست آورد.



شکل ۱۱- فازنما برای رابطه ی بین جریان و ولتاژ دو سر عنصرهای مدار سری RLC. **(الف)**: مقاومت ؛ **(ب)**: خودالقا؛ **(پ)**: خازن.

$$V_R(t)=I_0R\sin\omega t \tag{۳۱}$$

$$V_L(t)=I_0X_L\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)=V_{L0}\cos\omega t \tag{۳۲}$$

$$V_C(t)=I_0X_C\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)=-V_{C0}\cos\omega t \tag{۳۳}$$

$$V_{R0}\equiv I_0R\ ,\qquad V_{L0}\equiv I_0X_L\ ,\qquad V_{C0}\equiv I_0X_C \tag{۳٤}$$

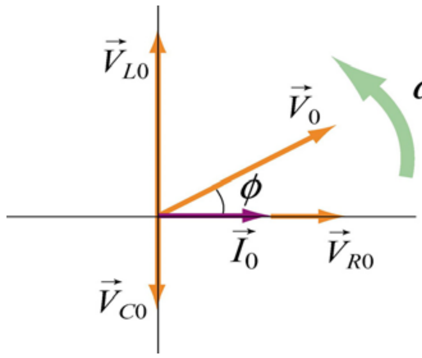
جمع این سه ولتاژ لحظه ای با ولتاژ چشمه ی نیروی محرکه ی متناوب برابر است:

$$V(t)=V_R(t)+V_L(t)+V_C(t) \tag{۳۵}$$

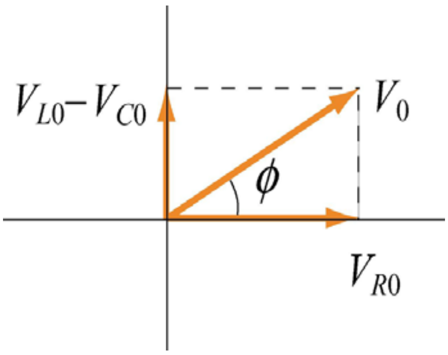
با استفاده از نمودار فازنما در شکل (۱۲) ، این رابطه را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\mathbf{V}_0=\mathbf{V}_{R0}+\mathbf{V}_{L0}+\mathbf{V}_{C0} \tag{۳٦}$$

باز هم دیده می شود که فازنمای جریان $\mathbf{I}_0$ به اندازه ی $\pi/2$ از ولتاژ دو سر خازن، $\mathbf{V}_{C0}$، جلوتر است اما به اندازه ی $\pi/2$ از ولتاژ دو سر خودالقا، $\mathbf{V}_{L0}$ عقب تر است. در حالی که مکان نسبی سه فازنمای ولتاژ ثابت است، آنها با گذشت زمان پادساعتگرد می چرخند. در شکل (۱۳) رابطه ی بین دامنه ی ولتاژها ی نشان



شکل ۱۲- فازنمای مدار سری RCL



شکل ۱۳- رابطه ی بین ولتاژها

داده شده اند. با توجه به این شکل می بینیم که

$$\begin{aligned}V_0=|\mathbf{V}_0|=|\mathbf{V}_{R0}+\mathbf{V}_{L0}+\mathbf{V}_{C0}|&=\sqrt{V_{R0}^2+(V_{L0}-V_{C0})^2}\\&=\sqrt{(I_0R)^2+(I_0X_L-I_0X_C)^2}=I_0\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}\end{aligned} \tag{۳۷}$$

که به همان نتیجه ی (۲۹) می انجامد.

توجه به این نکته مهم است که بیشینه ی دامنه ی ولتاژ چشمه ی نیروی محرکه ی متناوب با جمع بیشینه ی دامنه های ولتاژ دو سر عنصرهای مدار برابر نیست.

$$V_0 \neq V_{R0} + V_{L0} + V_{C0} \tag{۳۸}$$

دلیل این نابرابری این است که ولتاژها با هم هم فاز نیستند و در زمان های مختلف هر کدام به بیشینه مقدار خود می رسند.

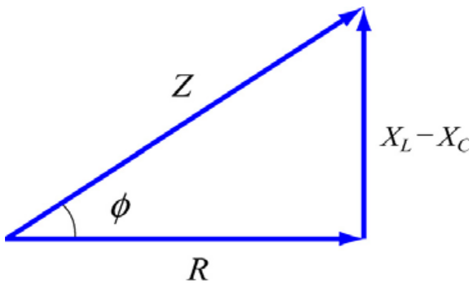
۳- پاگیری (امپدانس)

دیدیم که در مدار خودالقا، واکنایی خودالقلیی $X_L = \omega L$ و در مدار خازنی، واکنایی خازنی $X_C = 1/\omega C$ نقش مقاومت موثر آن مدارها را داشتند. در مدار RCL مقاومت موثر مدار با پاگیری (امپدانس) توصیف و به صورت زیر تعریف می شود

$$Z \equiv \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \tag{۳۹}$$

رابطه ی بین Z ، X_L و X_C را می توان با شکل (۱٤) نشان داد. یکای پاگیری هم در سامانه ی یکاهای SI اهم است. می توان جریان را برحسب Z به صورت زیر نوشت

$$I(t) = \frac{V_0}{Z}\sin(\omega t - \phi) \tag{٤٠}$$



شکل ۱٤- نمودار رابطه ی بین Z ، X_L و X_C

توجه کنید که Z هم همانند X_L و X_C به بسامد زاویه ای بستگی دارد. با استفاده از رابطه ی (۲۸) برای ϕ و رابطه ی (۳۹) برای Z به سادگی می توان حالت های حدی مدارهای ساده (مدارهای فقط با یک عنصر) را دوباره بازیافت. در جدول زیر این یافته ها خلاصه شده اند

مدار ساده	R	L	C	$X_L = \omega L$	$X_C = \frac{1}{\omega C}$	$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right)$	$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$
مدار مقاومت	R	0	C	0	0	0	R
مدار خودالقا	0	L	∞	X_L	0	$\pi/2$	X_L
مدار خازن	0	0	∞	0	X_C	$-\pi/2$	X_C

۴- تشدید

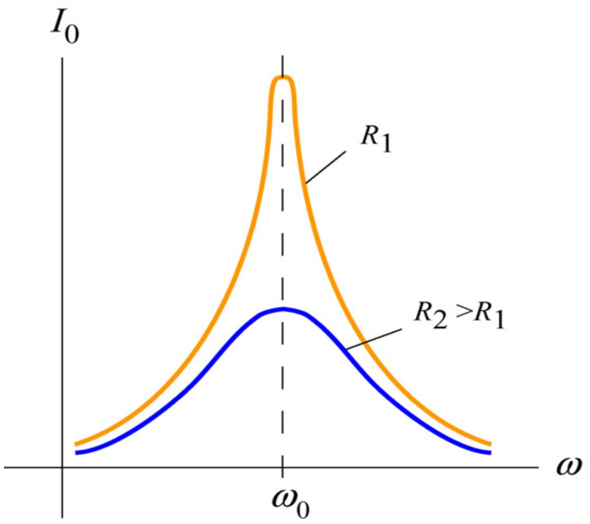
رابطه ی (۳۷) نشان می دهد که وقتی Z کمینه مقدار خود را داشته باشد، دامنه ی جریان $I_0 = V_0/Z$ به بیشینه مقدار خود می رسد. این وضعیت هنگامی روی می دهد که $X_L = X_C$ یا $L\omega = 1/C\omega$ باشد که به

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (٤١)$$

می انجامد. پدیده ای که دامنه ی جریان I_0 بیشینه می شود تشدید نامیده می شود و ω_0 بسامد تشدید است. در وضعیت تشدید، پاگیری $Z = R$ می شود و فاز و دامنه ی جریان عبارتند از

$$I_0 = \frac{V_0}{R}, \qquad \phi = 0 \qquad (٤٢)$$

در شکل (۱۵) رفتار I_0 برحسب بسامد ω برای مدار RCL واداشته نشان داده شده است

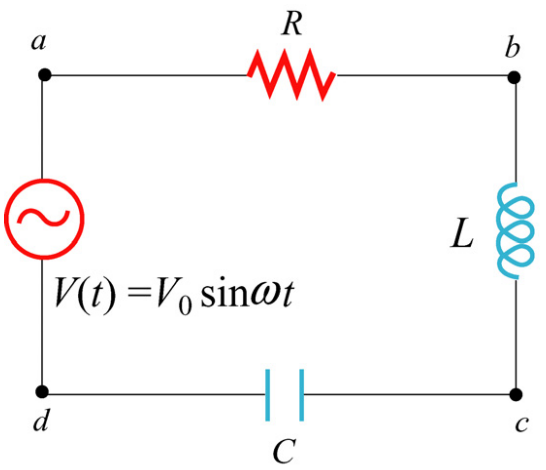


شکل ۱۵- رفتار دامنه ی جریان برحسب بسامد

مثال ۱- مدارسری RCL: فرض کنید مولد نیروی محرکه متناوب با $V(t) = (150V)\sin(100t)$ به طور سری در مدار RCL با $R = 40\,\Omega$، $L = 80\,\text{mH}$ و $C = 50\,\mu\text{F}$ (شکل ١٦) قرار دارد.

(الف): بیشینه ولتاژهای دو سر عنصرهای مدار، V_{R0}، V_{L0} و V_{C0} را حساب کنید.

(ب): اختلاف پتانسیل بیشینه ی بین نقاط b و d (یعنی اختلاف پتانسیل بیشینه ی بین یک سر خازن و یک سر خودالقا) را در شاخه ی bcd حساب کنید.



شکل ١٦- مدار سری RCL

حل: **(الف)** واکنایی های القایی و خازنی و نیز پاگیری مدار عبارتند از

$$X_L = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{(100\,\frac{\text{rad}}{\text{s}})(50\times10^{-6}\,\text{F})} = 200\,\Omega$$

$$X_C = L\omega = (100\,\tfrac{\text{rad}}{\text{s}})(80\times10^{-3}\,\text{H}) = 8\,\Omega \qquad (٤٣)$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{(40\,\Omega)^2 + (8\,\Omega - 200\,\Omega)^2} = 196\,\Omega \qquad (٤٤)$$

بنابراین ، بیشینه ی دامنه ی جریان برابر است با

$$I_0 = \frac{V_0}{Z} = \frac{150\,\text{V}}{196\,\Omega} = 0.765\ \text{A} \qquad (٤٥)$$

بنابراین، بیشینه ی ولتاژ دو سر عنصرهای مدار عبارتند از

$$\begin{aligned} V_{R0} &= I_0 R = (0.765\ \text{A})(40\ \Omega) = 30.6\ \text{V} \\ \text{V}_{\text{L0}} &= I_0 X_L = (0.765\ \text{A})(8.0\ \Omega) = 6.12\ \text{V} \\ \text{V}_{\text{C0}} &= I_0 X_C = (0.765\ \text{A})(200\ \Omega) = 153\ \text{V} \end{aligned} \tag{٤٦}$$

توجه کنید که بیشینه ولتاژ اعمال شده به مدار، V_0، با رابطه ی زیر به V_{R0} ، V_{L0} و V_{C0} مربوط است

$$V_0 = \sqrt{V_{R0}^2 + (V_{L0} - V_{C0})^2} \tag{٤٧}$$

(ب): بیشینه ولتاژ بین b و d برابر است با

$$|V_{bd}| = |\mathbf{V}_{L0} + \mathbf{V}_{C0}| = |V_{L0} - V_{C0}| = |\,6.12\ \text{V} - 153\ \text{V}| = 147\ \text{V} \tag{٤٨}$$

مثال ۲- تشدید: ولتاژ سینوسی $V(t) = (200\ \text{V})\sin\omega t$ به مدار سری RLC با $R = 20.0\ \Omega$ ، $L = 10\ \text{mH}$ و $C = 100\ \text{nF}$ اعمال می شود. کمیت های زیر را حساب کنید

(الف): بسامد تشدید. **(ب)**: دامنه ی جریان در حالت تشدید. **(پ)**: ضریب کیفیت Q مدار و **(ت)**: دامنه ی ولتاژ دو سر خود القا در حالت تشدید.

حل: (الف): بسامد تشدید مدار عبارت است از

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{1/LC} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{(10.0\times 10^{-3}\ \text{H})(100\times 10^{-9}\ \text{F}}} = 5033\ \text{Hz} \tag{٤٩}$$

(ب): در حالت تشدید، جریان عبارت است از

$$I_0 = \frac{V_0}{R} = \frac{200\ \text{V}}{20.0\ \Omega} = 10.0\ \text{A} \tag{٥٠}$$

(پ): ضریب کیفیت مدار برابر است با

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{2\pi(5033\ \text{s}^{-1})(10.0\times 10^{-3}\ \text{H})}{20.0\ \Omega} = 15.8 \tag{٥١}$$

(ت): در حالت تشدید، اختلاف پتانسیل دو سر خودالقا عیارت است از

$$V_{L0} = I_0 X_L = I_0\omega_0 L = (10.0\ \text{A})\,2\pi(5033\,\text{s}^{-1})(10.0\times 10^{-3}\,\text{H}) = 3.16\times 10^3\ \text{V} \tag{٥٢}$$

۱-۵- توان در مدارهای با جریان متناوب

در مدارهای RCL توانی را که نیروی محرکه ی متناوب یه مدار منتقل می کند برابر است با

$$\begin{aligned} P(t) &= I(t)V(t) = \frac{V_0}{Z}\sin(\omega t - \phi)\cdot V_0 \sin\omega t = \frac{V_0^2}{Z}\sin(\omega t - \phi)\sin\omega t \\ &= \frac{V_0^2}{Z}\left(\sin^2\omega t\cos\omega t - \sin\omega t\cos\omega t\sin\phi\right) \end{aligned} \tag{٥٣}$$

که در آن از اتحاد مثلثاتی $\sin(\omega t - \phi) = \sin\omega t\cos\phi - \cos\omega t\sin\phi$ استفاده کردیم. میانگین زمانی توان عبارت است از

$$\langle P(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{V_0^2}{Z}\sin^2\omega t\cos\phi\, dt - \frac{1}{T}\int_0^T \frac{V_0^2}{Z}\sin\omega t\cos\omega t\sin\phi\, dt$$

$$= \frac{V_0^2}{Z}\cos\phi\langle\sin^2\omega t\rangle - \frac{V_0^2}{Z}\sin\phi\langle\sin\omega t\cos\omega t\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{Z}\cos\phi \qquad (٥٤)$$

برحسب کمیت های جذر میانگین مربعی توان میانگین را می توان به صورت زیر نوشت

$$\langle P(t)\rangle = \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{Z}\cos\phi = \frac{V_{rms}^2}{Z}\cos\phi = I_{rms}V_{rms}\cos\phi \qquad (٥٥)$$

کمیت $\cos\phi$ **ضریب توان** نام دارد. از شکل (١٤) به سادگی می توان دید که

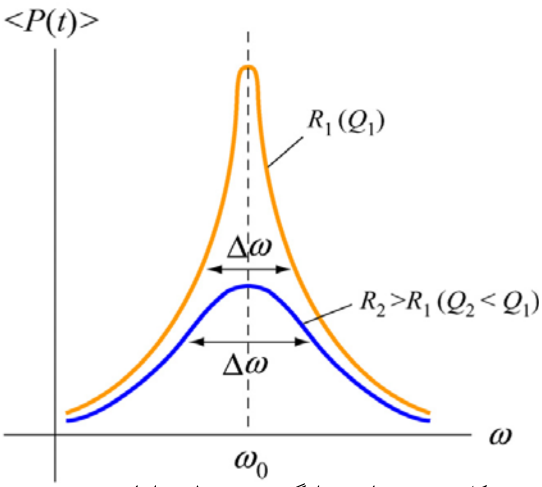
$$\cos\phi = \frac{R}{Z} \qquad (٥٦)$$

و بنابراین $\langle P(t)\rangle$ را می توان به صورت زیر نوشت

$$\langle P(t)\rangle = I_{rms}V_{rms}\left(\frac{R}{Z}\right) = I_{rms}\left(\frac{V_{rms}}{Z}\right)R = I_{rms}^2 R \qquad (٥٧)$$

در شکل (١٧) توان میانگین به صورت تابعی از بسامد زاویه ای ω نشان داده شده است. می بینیم که وقتی $\cos\phi = 1$ یا $Z = R$ است، $\langle P(t)\rangle$ به مقدار بیشینه ی خود می رسد. این حالت تشدیدی است. در وضعیت تشدید داریم

$$\langle P\rangle_{\max} = I_{rms}V_{rms} = \frac{V_{rms}^2}{R} \qquad (٥٨)$$



شکل ١٧- توان میانگین در مدار واداشته ی RCL برحسب تابعی از بسامد زاویه ای ω

٢-٥- پهنای قله ی توان

گهنای قله ی توان انتقالی به مدار واداشته ی RCL خطی است. یک روش برای مشخص کردن سرشت پهنا این است که بازه ی $\Delta\omega = \omega_+ - \omega_-$ را تعریف کنیم. $\omega_\pm$ مقادیر بسامد وادارنده است که به ازای آنها توان نصف مقدار بیشینه ی خود در حالت تشدید است. این بازی در شکل (١٨) نسان داده شده است و **پهنای کل در نصف بیشینه** نام دارد. پهنای $\Delta\omega$ با R افزایش پیدا می کند. برای یافتن $\Delta\omega$ بتهر است نخست توان میانگین را به صورت زیر بنویسیم

$$\langle P(t)\rangle = \frac{1}{2}\frac{V_0^2 R}{R^2 + \left(\omega L - 1/\omega C\right)^2} = \frac{1}{2}\frac{V_0^2 R\omega^2}{\omega^2 R^2 + L^2\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2} \qquad (٥٩)$$

با توجه به این که $\langle P(t)\rangle_{\max} = V_0^2/2R$ است، شرط یافتن $\omega_\pm$ به صورت زیر در می آید

$$\frac{1}{2}\langle P(t)\rangle_{max} = \langle P(t)\rangle_{\omega_\pm}\Big| \quad \Rightarrow \quad = \frac{V_0^{\,2}}{4R} = \frac{1}{2}\frac{V_0^{\,2}R\,\omega^2}{\omega^2R^2 + L^2\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2}\Bigg|_{\omega_\pm}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2 = \left(\frac{R\,\omega}{L}\right)^2 \qquad (٦٠)$$

اگر جذر این عبارت را حساب کنیم، دو پاسخ به دست می آید که جداگانه آنها را بررسی می کنیم.

حالت ۱- ریشه ی مثبت رابطه ی (٦٠) به دست می دهد

$$\omega_+^2-\omega_0^2 = +\frac{R\,\omega_+}{L} \qquad (٦١)$$

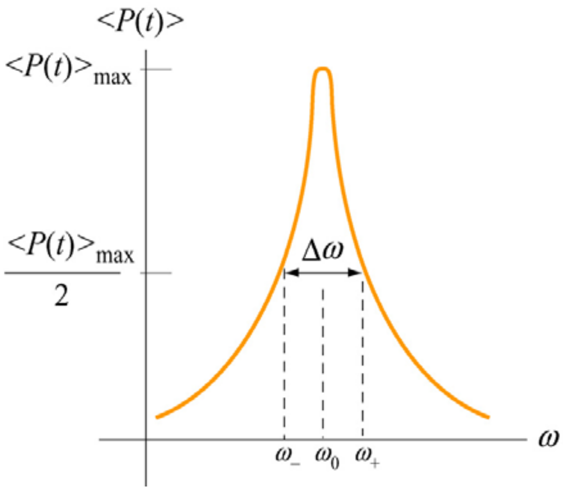
از حل این معادله ی درجه دو خواهیم داشت

$$\omega_+ = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{4L}\right)^2 + \omega_0^2} \qquad (٦٢)$$

حالت ۲- از ریشه ی منفی رابطه ی (٦٠) داریم

$$\omega_-^2-\omega_0^2 = -\frac{R\,\omega_-}{L} \qquad (٦٣)$$

و پاسخ این معادله ی درجه دو عبارت است از



شکل ۱۸- نمایش پهنای قله ی توان

$$\omega_- = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{4L}\right)^2 + \omega_0^2} \qquad (٦٤)$$

بنابراین، پهنا در نصف بیشینه عبارت است از

$$\Delta\omega = \omega_+ - \omega_- = \frac{R}{L} \qquad (٦٥)$$

با دانستن پهنا، $\Delta\omega$ ، ضریب کیفیت Q (با بار الکتریکی اشتباه نشود!) را می توان به صورت زیر یافت

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0 L}{R} \qquad (٦٦)$$

از مقایسه ی این رابطه با آخرین رابطه در پیوست فصل پیش، $Q = \omega' L/R$ ، می بینیم که در حد مقاومت های کم این دو رابطه باهم سازگارند؛ چون برای R ها ی کوچک $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - (R/2L)^2} \approx \omega_0$.

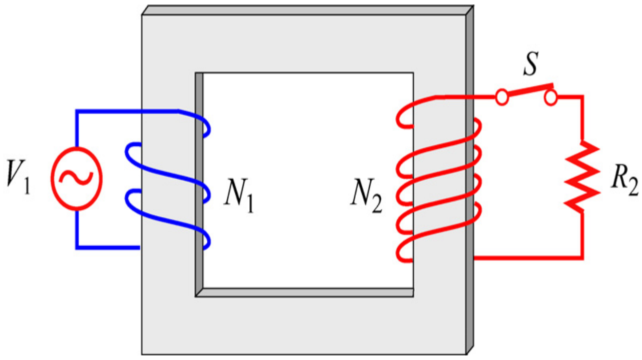
۶- مبدل یا ترانسفورموتور

مبدل وسیله ای است که برای افزایش یا کاهش ولتاژ در مدارهای با جریان متناوب به کار می رود و از دو پیچه ی اولیه و ثانوی تشکیل شده است . مدار اولیه شامل N_1 سیم و مدار ثانویه شامل N_2 دور سیم است که همانند شکل (۱۹) دور یک مغزی آهنی پیچیده می شوند. مدار اولیه به چشمه ی نیروی محرکه ی متناوب با ولتاژ $V_1(t)$ و مدار ثانویه به " بار مقاومت " R_2 وصل می شوند. اساس کار مبدل این است که جریان متناوب در مدار اولیه به خاطر القاء متقابل دو مدار در مدار ثانویه نیروی محرکه ی متناوب القا می کند.

اگر از مقاومت اندک مدار اولیه چشم پوشی کنیم، بنا به قانون فاراده در مدار اولیه داریم

$$V_1 = -N_1 \frac{d\Phi_B}{dt} \qquad (٦٧)$$

Φ_B شار مغناطیسی گذرنده از یک حلقه ی مدار اولیه است. نقش مغزی آهنی تقویت کردن میدان مغناطیسی است که جریان در مدار اولیه تولید می کند. هم چنیف مغزی آهنی سبب می شود که به تقریب همه ی شار گذرنده از مدار اولیه از هر یک از حلقه های مدار ثانویه هم می گذرد. بنابراین، ولتاژ یا نیروی محرکه القایی در مدار ثانویه برابر است با



شکل ۱۹- نمای یک مبدل

$$V_2 = -N_2 \frac{d\Phi_B}{dt} \qquad (٦٨)$$

در حالت مبدل ارمانی می توان از اتلاف توان به خاطر گرما چشم پوشی کرد. در این صورت توانی که ندار اولیه فراهم می کند به طور کامل به مدار ثانویه انتقال می یابد. بنابراین، داریم

$$I_1 V_1 = I_2 V_2 \qquad (٦٩)$$

افزون بر این، هیچ شار مغناطیسی از مغزی آهنی به بیرون نشت نمی کند و شار Φ_B گذرنده از هر حلقه در هر دو مدار یکسان است. ار ترکیب دو رابطه ی بالا معادله ی مبدل به دست می آید

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} \qquad (٧٠)$$

از ترکیب دو رابطه ی (٦٩) و (٧٠) رابطه ای میان جریان ها در دو مدار اولیه و ثانویه به دست می آید

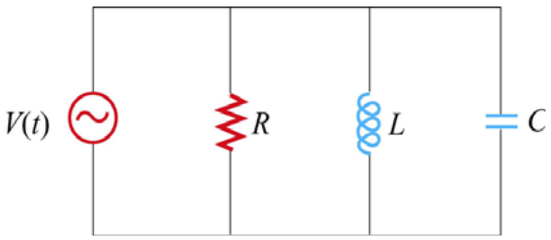
$$I_1 = \left(\frac{V_2}{V_1}\right) I_2 = \left(\frac{N_2}{N_1}\right) I_2 \qquad (٧١)$$

بنابراین می بینیم که نسبت ولتاژ خروجی به ولتاژ ورودی با نسبت دورهای مدارثانوی به مدار اولیه ، N_2/N_1 ، تعیین می شود. اگر $N_2 > N_1$ باشد، $V_2 > V_1$ می شود؛ یعنی ولتاژ خروجی در مدار ثانویه از ولتاژ ورودی در مدار اولیه بیشتر است. مبدل با $N_2 > N_1$ را مبدل **بالا برنده** می نامند. اگر $N_2 < N_1$ باشد، آنگاه $V_2 < V_1$ می شود و ولتاژ خروجی در مدار ثانوی کمتر از ولتاژ ورودی در مدار اولیه می شود. مبدل با $N_2 < N_1$ را مبدل **پایین آورنده** می نامند.

۷- مدار RCL موازی

مدار RCL موازی شکل (۲۰) را در نظر بگیرید که در آن چشمه ی ولتاژ متناوب $V(t) = V_0 \sin \omega t$ است. برعکس مدار سری RCL ، اینک ولتاژ لحظه ای دو سر هر سه عنصر، R ، C و L مدار یکسان اند. افزون بر این، هر یک از ولتاژها با جریان گذرنده از مقاومت هم فاز است. اما جریان گذرنده از هر یک از عنصر

های مدار با هم فرق دارند. در بررسی این مدار از یافته های بخش ۲ تا ٥ استفاده خواهیم کرد. جریان در مقاومت برابر است با



شکل ۲۰- مدار موازی RLC

$$I_R(t)=\frac{V(t)}{R}=\frac{V_0}{R}\sin\omega t=I_{R0}\sin\omega t \tag{۷۲}$$

که در آن $I_{R0}=V_0/R$ است. ولتاژ دو سر خودالقا عبارت است از

$$V_L(t)=V_0\sin\omega t=L\frac{dI_L}{dt} \tag{۷۳}$$

از این رابطه می توان جریان گذرنده از خود القا را به دست آورد

$$I_L(t)=\int_0^t\frac{V_0}{L}\sin\omega t'\,dt'=-\frac{V_0}{\omega L}\cos\omega t=\frac{V_0}{X_L}\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)=I_{L0}\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right) \tag{۷٤}$$

که در آن $I_{L0}=V_0/X_L$ و $X_L=\omega L$ واکنایی القایی است.

هم چنین از ولتاژ دو سر خازن $V_C(t)=V_0\sin\omega t=Q(t)/C$ خواهیم داشت

$$I_C(t)=\frac{dQ}{dt}=\omega CV_0\cos\omega t=\frac{V_0}{X_C}\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)=I_{C0}\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right) \tag{۷٥}$$

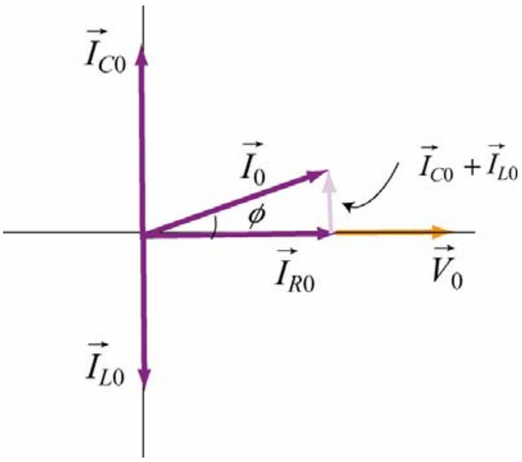
که در آن $I_{L0}=V_0/X_C$ و $X_C=1/\omega C$ واکنایی خازن است. با توجه به قانون پیوندگاه کرشهوف می دانیم که جریان کل مدار جمع این سه جریان است

$$\begin{aligned}I(t)&=I_R(t)+I_L(t)+I_C(t)\\&=I_{R0}\sin\omega t+I_{L0}\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)+I_{C0}\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned} \tag{۷٦}$$

در نمودار فازنمای شکل (۲۱) این جریان ها نشان داده شده اند. از این نمودار دیده می شود که

$$\mathbf{I}_0=\mathbf{I}_{R0}+\mathbf{I}_{L0}+\mathbf{I}_{C0} \tag{۷۷}$$

بیشینه دامنه ی جریان کل را می توان به صورت زیر حساب کرد.



شکل ۲۱- فازنما ی مدار RCL موازی

$$\begin{aligned}I_0=|\mathbf{I}_0|=|\mathbf{I}_{R0}+\mathbf{I}_{L0}+\mathbf{I}_{C0}|&=\sqrt{\mathbf{I}_{R0}^2+(\mathbf{I}_{C0}-\mathbf{I}_{L0})^2}\\&=V_0\sqrt{\frac{1}{R^2}+\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)^2}\\&=V_0\sqrt{\frac{1}{R^2}+\left(\frac{1}{X_C}-\frac{1}{X_L}\right)^2}\end{aligned} \tag{۷۸}$$

توجه کنید که $I_R(t)$ ، $I_L(t)$ و $I_C(t)$ هم فاز نیستند.

هم چنین توجه کنید که I_0 با جمع بیشینه دامنه های این سه جریان برابر نیست:

$$I_0 \neq I_{R0}+I_{L0}+I_{C0} \tag{۷۹}$$

با توجه به $I_0 = V_0/Z$ ، وارون پاگیری عبارت است از

$$\frac{1}{Z}=\sqrt{\frac{1}{R^2}+\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{R^2}+\left(\frac{1}{X_C}-\frac{1}{X_L}\right)^2} \tag{۸۰}$$

در شکل (۲۲) رابطه ی بین Z ، R ، X_L و X_C در مدار RCL موازی با نمودار فازنما نشان داده شده است. از این شکل می بینیم که می توان فازرا به صورت زیر حساب کرد

$$\tan\phi=\left(\frac{I_{C0}-I_{L0}}{I_{R0}}\right)=\frac{\dfrac{V_0}{X_C}-\dfrac{V_0}{X_L}}{\dfrac{V_0}{R}}=R\left(\frac{1}{X_C}-\frac{1}{X_L}\right)=R\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right) \tag{۸۱}$$

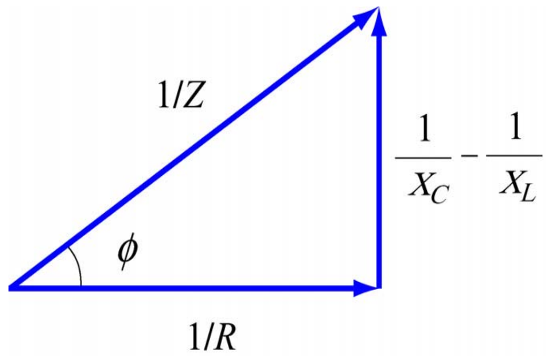
شرط تشدید در مدار RCL موازی با $\phi=0$ داده می شود. از این شرط برمی آید که در حالت تشدید داریم

$$\frac{1}{X_C}=\frac{1}{X_l} \tag{۸۲}$$

و بسامد تشدید عبارت است از

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{۸۳}$$

که با بسامد تشدید در حالت مدار RCL سری یکسان است. از رابطه ی (۸۰) دیده می شود که در حالت تشدید $1/Z$ کمینه (Z بیشینه) است. جریان در خودالقا با جریان در خازن حذف می شود و



شکل ۲۲- فازنمای مدار RCL موازی

جریان کل مدار به کمینه مقدار خود می رسد که جریان گذرنده ازمقاومت است . این جریان برابر است با

$$I_0=\frac{V_0}{R} \tag{۸۴}$$

مانند حالت مدار RCL سری در اینجا هم توان فقط در مقاومت به گرما بتدیل و تلف می شود

$$\langle P(t)\rangle=\langle I_R(t)V(t)\rangle=\langle I_R^2(t)R\rangle=\frac{V_0^2}{R}\langle\sin^2\omega t\rangle=\frac{V_0^2}{2R}=\frac{V_0^2}{2Z}\left(\frac{Z}{R}\right) \tag{۸۵}$$

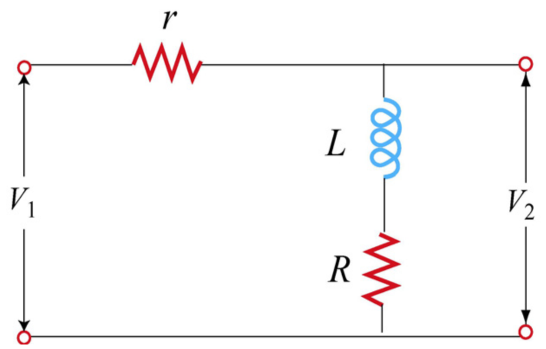
و ضریب توان به صورت زیر در می آید

$$\frac{\langle P(t)\rangle}{V_0^2/2Z}=\frac{Z}{R}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(R\omega C-\dfrac{R}{\omega L}\right)^2}}=\cos\phi \tag{۸۶}$$

مثال ۳- مدار RL **- پالایه ی جریان بالا:** شکل (۲۳) مدار RL برای پالایه ی جریان بالا است (این مدار جریان های متناوب با بسامد کم را حذف می کند). در این مدار R مقاومت درونی خودالقاست.

[الف]: نسبت بیشینه ولتاژ خروجی، V_{20} به بیشینه ولتاژ ورودی V_{10} یا V_{20}/V_{10} را بیابید.

(ب): اگر $r=15\Omega$ ، $R=10\Omega$ و $L=250\,\text{mH}$ باشند، به ازای چه بسامدی $V_{20}/V_{10}=1/2$ است؟



شکل ۲۳- پالایه ی RL

حل: **(الف)** پاگیری مدار ورودی عبارت است از $Z_1=\sqrt{(R+r)^2+X_L^2}$ که در آن $X_L=\omega L$ است. پاگیری مدار خروجی هم برابر است با $Z_2=\sqrt{R^2+X_L^2}$. بیشینه ی جریان برابر است با

$$I_0=\frac{V_{10}}{Z_1}=\frac{V_0}{\sqrt{(R+r)^2+X_L^2}} \tag{۸۷}$$

به همین ترتیب، ولتاژ بیشینه ی خروجی هم به صورت زیر به پاگیری مدار خروجی مربوط است

$$V_{20}=I_0Z_2=I_0\sqrt{R^2+X_L^2} \tag{۸۸}$$

از این دو رابطه به دست می آید

$$\frac{V_{20}}{V_{10}}=\frac{\sqrt{R^2+X_L^2}}{\sqrt{(R+r)^2+X_L^2}} \tag{۸۹}$$

(ب): برای این که $V_{20}/V_{10}=1/2$ باشد داریم

$$\frac{R^2+X_L^2}{(R+r)^2+X_L^2}=\frac{1}{4} \quad\Rightarrow\quad X_L=\sqrt{\frac{(R+r)^2-4R^2}{3}} \tag{۹۰}$$

چون $X_L=\omega L=2\pi fL$ است بنابراین،

$$f=\frac{X_L}{2\pi L}=\frac{1}{2\pi(0.250\,\text{H})}\sqrt{\frac{(10.0\,\Omega+15.0\,\Omega)^2-4(10.0\,\Omega)^2}{3}}=5.51\ \text{Hz} \tag{۹۱}$$

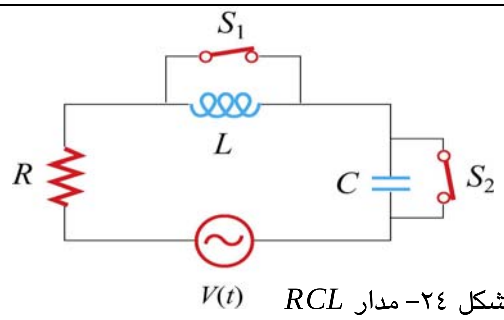
مثال ۴- مدار RCL: مدار شکل (۲٤) را در نظر بگیرید. چشمه ی ولتاژ سینوسی $V(t)=V_0\sin\omega t$ است.

اگر در آغاز هر دو کلیدهای S_1 و S_2 بسته باشند کمیت های زیر را حساب کنید. فرض کنید R، L ، V_0 و ω داده شده اند و از اثرهای جزیی چشم پوشی کنید.

(الف): جریان $I(t)$ برحسب تابعی از زمان

(ب): توان میانگین انتقالی به مدار

(پ): پس از آنگه کلید S_1 برای مدت زمان درازی



شکل ۲٤- مدار RCL

قطع شده باشد، جریان را به صورت تابعی از زمان به دست آورید.

(ت): ظرفیت C خازن را پس از آنگه هر دو کلید S_1 و S_2 برای مدت طولانی قطع شوند و جریان و ولتاژ هم فاز باشند.

(ج): پاگیری مدار وقتی که هر دو کلید S_1 و S_2 باز اند.

(چ): بیشینه انرژی انباشته شده در خازن در طول نوسان

(ح): بیشینه انرژی انباشته شده در خودالقا در طول نوسان

(خ): اختلاف فاز بین جریان و ولتاژ ، اگر بسامد $V(t)$ دوبرابر شود.

(د): بسامدی که در آن واکنایی خودالقایی X_L نصف واکنایی خازنی X_C می شود.

حل: **(الف)** وقتی هر دو کلید S_1 و S_2 برای مدت طولانی بسته باشند، جریان فقط از مولد و مقاومت می گذرد. بنابراین ، پاگیری کل مدار R و جریان عبارت است از

$$I_R(t) = \frac{V_0}{R}\sin\omega t \qquad (۹۲)$$

(ب): توان میانگین عبارت است از

$$\langle P(t)\rangle = \langle I_R(t)V(t)\rangle = \frac{V_0^2}{R}\langle\sin^2\omega t\rangle = \frac{V_0^2}{2R} \qquad (۹۳)$$

(پ): اگر کلید S_1 باز باشد، پس از زمانی دراز جریان فقط از مقاومت، مولد و خودالقا می گذرد. برای این مدار RL پاگیری به صورت زیر در می آید

$$Z = \frac{1}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{1}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}} \qquad (۹٤)$$

و زاویه ی فاز عبارت است از

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right) \qquad (۹۵)$$

بنابراین، جریان به صورت تابعی از زمان به صورت زیر در می آید

$$I(t) = I_0\sin(\omega t - \phi) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin\left(\omega t - \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}\right) \qquad (۹٦)$$

توجه کنید که در حد $R \to 0$ خواهیم داشت $\phi = \pi/2$ و نتیجه ای را که برای مدار ساده ی خودالقا انتظار داریم، دوباره به دست می آید.

(ت): اگر هر دو کلید باز باشند ، این مدار به مدار RCL واداشته تبدیل می شود که زاویه ی فاز آن

$$\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R} \qquad (۹۷)$$

اگر جریان و ولتاژ هم فاز باشند، آنگاه $\phi = 0$ می شود و در نتیجه $\tan\phi = 0$. اگر بشامد زاویه ای را در این حالت ω_0 بنامیم، خواهیم داشت

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{\omega_0^2 L} \qquad (۹۸)$$

(ج): از پاسخ قسمت (ت) دیده می شود که وقتی هر دو کلید باز اند، مدار در حالت تشدید قرار می گیرد و $X_L = X_C$. بنابراین ، پاگیری مدار عبارت است از

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = R \qquad (۹۹)$$

(چ): انرژی الکتریکی انباشته شده در خازن برابر است با

$$U_E = \frac{1}{2} C V_C^2 = \frac{1}{2} C (I X_C)^2 \qquad (۱۰۰)$$

و هنگامی به بیشینه مقدار خود می رسد که جریان بیشینه باشد. با استفاده از $\omega_0 = 1/LC$ داریم

$$U_{C,\max} = \frac{1}{2} C I_0^2 X_C^2 = \frac{1}{2} C \left(\frac{V_0}{R}\right)^2 \frac{1}{\omega_0^2 C^2} = \frac{V_0^2 L}{2R^2} \qquad (۱۰۱)$$

(ح): بیشینه انرژی انباشته شده در خودالقا عبارت است از

$$U_{L,\max} = \frac{1}{2} L I_0^2 = \frac{L V_0^2}{2R^2} \qquad (۱۰۲)$$

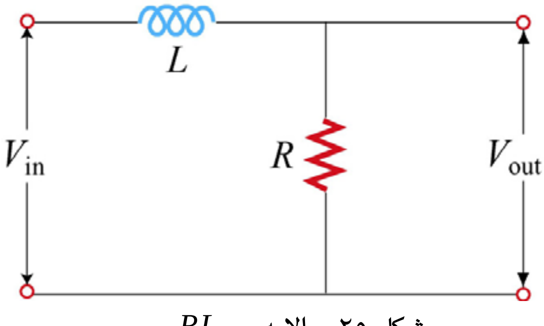
(خ): اگر بسامد چشمه ی ولتاژ دوبرابر شود، یعنی $\omega = 2\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ باشد، آنگاه فاز براب می شود با

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L - 1/\omega C}{R}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\left(2/\sqrt{LC}\right)L - \left(\sqrt{LC}/2C\right)}{R}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}}\right) \qquad (۱۰۳)$$

(د): اگر واکنایی القایی نصف واکنایی خازنی باشد، می توان نوشت

$$X_L = \frac{1}{2} X_C \quad \Rightarrow \quad \omega L = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega C}\right) \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{2LC}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \qquad (۱۰٤)$$

مثال ۵- پالایه ی RL: مدار شکل (۲۵) مدار یک پالایه ی RL است. فرض کنید $L = 400\,\text{mH}$ و ولتاژ فرودی $V_{in} = (20.0\,\text{V})\sin\omega t$ با بسامد $\omega = 200\, rad/s$ باشد.



شکل ۲۵- پالایه ی RL

(الف): برای این که ولتاژ خروجی به اندازه ی 30° از ولتاژ ورودی عقب افتادگی داشته باشد ، مقدار R چقدر باید باشد؟

(ب): نسبت دامنه های ولتاژهای خروجی و ورودی را حساب کنید. این پالایه چه نوع پالایه ای است؟ پالایه ی جریان بالا یا جریان پایین؟

(پ): اگر مکان خودالقا و مقاومت عوض شوند، آیا پالایه ، پالایه ی جریان بالا یا جریان پایین می شود؟

حل: **(الف)** رابطه ی فاز بین V_{in} و V_{out} عبارت است از

$$\tan\phi = \frac{V_{in}}{V_{out}} = \frac{IX_L}{IX_R} = \frac{\omega L}{R} \tag{۱۰۵}$$

بنابراین داریم

$$R = \frac{\omega L}{\tan\phi} = \frac{(200\,\text{rad/s})(0.400\,\text{H})}{\tan 30^\circ} = 139\ \Omega \tag{۱۰۶}$$

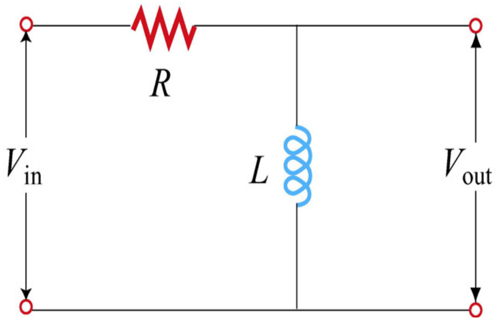
(ب): نسبت ولتاژها عبارت است از

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \cos\phi = \cos 30^\circ = 0.866 \tag{۱۰۷}$$

این مدار پالایه ی جریان پایین است ؛ چون نسبت V_{out}/V_{in} با افزایش ω کاهش پیدا می کند.

(پ): در این صورت مدار به صورت شکل (۲۶) در می آید. نسبت ولتاژ خروجی به ولتاژ ورودی برای این مدار عبارت است از

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{X_L}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{\omega^2 L^2}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$
$$= \left[1 + \left(\frac{R}{\omega L}\right)^2\right]^{-1/2} \tag{۱۰۸}$$



شکل ۲۶- مدار جریان بالا

این پالایه ، یک پالایه ی جریان بالاست چون درحد بسامد های ω زیاد V_{out}/V_{in} به یک میل می کند.